FEN VE MÜHENDİSLİKTE

MATEMATİK METOTLAR

1. KİTAP

REEL DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

$$F\left(x\right)$$

İÇİNDEKİLER

I. SAYI SİSTEMLERİ

Saymak, ölçmek ve biçimleri incelemek olarak tanımlanan matematik, paleolitik çağlardan itibaren insan hayatına girmiştir. İnsanlığın yücelişinin hem sebebi, hem de sonucu olan bu uğraş sadece bilimin değil kültürün de vazgeçilmez bir parçasıdır. Sayma işlemi önceleri doğal olarak pozitif tamsayılarla başlamış, sonra ihtiyaca göre daha kapsamlı sayı sistemlerine geçilmiştir. Burada ihtiyaç ile kastedilen, matematik diliyle 'Kapalılık', yani bir aritmetik işlem sonucunun o işlemin girdileri ile aynı türde olması gereğidir. Pozitif tamsayılar sadece toplam ve dolayısıyla çarpım işlemlerinde kapalıdırlar. Yani iki pozitif tamsayının $+$ ve $\times$ ile birleştirilmesinin sonucu da bir pozitif tamsayı olur. Ancak $+$ işleminin tersi $-$ işlemi altında kapalı kalabilmek için sıfır ve negatif tamsayıların da sisteme alınması gerekir. $\times$ işleminin tersi $\div$ işlemi altında kapalılık ise $\frac{M}{N}$ $(N \neq 0)$ biçiminde rasyonel sayıları gerektirir. Özel bir çarpım olan kare almanın ters işlemi $\sqrt{\ }$ devreye girince rasyonel sayılar da yetersiz kalacaktır. $\sqrt{2} \neq \frac{M}{N}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Bunun üstüne negatif sayıların karekökü için gerekli olan sanal sayıları da sisteme dahil edince, aritmetiğin beş temel :

$$a+b = b+a \quad , \quad a\,b = b\,a$$

$$a+(b+c) = (a+b)+c \quad , \quad a\,(b\,c) = (a\,b)\,c$$

$$a\,(b+c) = a\,b+a\,c$$

kuralına uyacak en genel sisteme, kompleks sayılara, erişmiş oluruz. [(1)]

Pozitif tamsayıların küme 'si	$\mathcal{N}$
Bütün tamsayıların küme 'si	$\mathcal{Z}$
Rasyonel sayıların küme 'si	$\mathcal{Q}$
Reel sayıların küme 'si	$\mathcal{R}$
Kompleks sayıların küme 'si	$\mathcal{C}$

ile gösterilir ve $\mathcal{C} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{N}$ olur. Bu sayı sistemlerinin

eleman sayısı bakımından aynı zenginlikte olmadıkları, hepsinin eleman sayıları sonsuz olduğu halde bu sonsuzların aynı mertebede olmadıkları sezilir. Öte yandan her küme 'nin mertebesi ayrı da değildir ve sadece iki mertebe sonsuzluk yukarıdaki tüm sayı sistemlerinin tasnifinde yeterlidir. $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{R}$ geçişinde, sayılabilir sonsuz $\aleph_o$ 'dan, sayılamaz sonsuz $\aleph_1$ ' e de geçilmiş olur. F sonlu bir sayı olmak üzere $F\ \aleph_N \rightarrow \aleph_N$, hatta $(\aleph_N)^F \rightarrow \aleph_N$ olduğu halde $(F)^{\aleph_N}$ işlemi, bir üst mertebe olan $\aleph_{N+1}$ 'i verir. $[\,0\,,\,1\,]$ aralığında herhangi bir sayı $0\,.\,a_1\,a_2\,a_3\,\ldots$ biçiminde yazılabildiğine ve sayılabilir sonsuz hanelerin her biri için 10 tercih yapılabildiğine göre $[\,0\,,\,1\,]$ aralığında toplam $(10)^{\aleph_o}$ yani $\aleph_1$ sayılamaz sonsuz sayı var demektir.

PROBLEMLER

P.I.1) $\sqrt{2} \notin \mathcal{Q}$ olduğunu gösterin.

P.I.2) Rasyonel sayıların sayılabilir sonsuz adet $\aleph_o$ olduğunu gösterin.

II. FONKSİYONLAR

$y = F(x)$ ile gösterilen fonksiyon kavramı, verilen bir x reel sayısı için bir (ve sadece bir !) $y = F(x)$ reel sayısını, belli bir kurala göre elde etmek işlemidir. Daha basit bir ifade ile : Fonksiyonlar iki sütunlu tablolardır. İlk sütundan x değerini seçer, sonra da ikinci sütundan ona karşılık gelen $y = F(x)$ değerini buluruz. Bunun tersi, yani önce ikinci sütundan bir değer seçip, sonra da birinci sütundan onun karşılığını bulmak ise 'Ters Fonksiyon' işlemi olarak adlandırılır. Kısaca $y = F(x) \quad \leftrightarrow \quad x = F^{-1}(y)$ olarak yazılan ters fonksiyon işleminin, sürekli artan veya sürekli eksilen fonksiyonlar dışında, tanımlanma güçlükleri, ancak bunların da aşılma yolları vardır. Fonksiyon kuralları gereği bazan x bağımsız değişkenini, bazan da $y = F(x)$ bağımlı değişkenini sınırlamak gerekir.

$F(x) = 3\sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonu için $-2 \le x \le 2$ ve $0 \le F(x) \le 6$ sınırlamaları vardır. Bağımsız değişken x 'in alabileceği değerler o fonksiyonun 'Tanım Aralığı' , bağımlı değişken $y = F(x)$ 'in alabileceği değerler ise 'Değer Aralığı' olarak adlandırılır. Fonksiyonlar 'Cebirsel' , 'Sayısal' ve 'Diferansiyel' olarak 3 ayrı başlık altında incelenir. Bu düzeyde incelenecek temel fonksiyonların sayısı 27 ile sınırlıdır. Bu sayı biraz abartılıdır, 27 sayısına erişmek için tarihi sebeplerle, mesela $\sin x$ ve $\csc x \equiv \dfrac{1}{\sin x}$ ayrı ayrı sayılmaktadır. Bir diğer ilginç nokta da her fonksiyonun bir de ters fonksiyonu olduğu halde toplam sayının çift olmamasıdır. Bunun gerekçesi kuvvet fonksiyonunun ters fonksiyonunun da kuvvet fonksiyonu olmasıdır.

İncelenecek 27 temel fonksiyon :

1) Kuvvet fonksiyonu : x^a

2-7) Trigonometrik fonksiyonlar :

$\sin(x) \;,\; \cos(x) \;,\; \tan(x) \;,\; \csc(x) \;,\; \sec(x) \;,\; \mathrm{ctn}(x)$

8-13) Ters trigonometrik fonksiyonlar :

$\sin^{-1}(x) \;,\; \cos^{-1}(x) \;,\; \tan^{-1}(x) \;,\; \csc^{-1}(x) \;,\; \sec^{-1}(x) \;,\; \mathrm{ctn}^{-1}(x)$

14) Üstel fonksiyon : $\exp(x) = e^x$

15) Logaritma fonksiyonu : $\ell n(x)$

16-21) Hiperbolik fonksiyonlar :

$$\sinh(x) \quad , \quad \cosh(x) \quad , \quad \tanh(x) \quad , \quad \mathrm{csch}(x) \quad , \quad \mathrm{sech}(x) \quad , \quad \mathrm{ctnh}(x)$$

22-27) Ters hiperbolik fonksiyonlar :

$$\sinh^{-1}(x) \quad , \quad \cosh^{-1}(x) \quad , \quad \tanh^{-1}(x) \quad , \quad \mathrm{csch}^{-1}(x) \quad , \quad \mathrm{sech}^{-1}(x) \quad , \quad \mathrm{ctnh}^{-1}(x)$$

olacaktır. Ancak tüm özellikler incelendiğinde bu 27 sayısı 3 'e kadar iner. [(2)]

PROBLEMLER

P.II.1) $F(x) = x^2$ için ters fonksiyon bulma güçlüğünü tartışın ve bir çıkış yolu bulun.

III. CEBİRSEL ÖZELLİKLER

A) Kuvvet Fonksiyonu

Kuvvet fonksiyonunun tarihsel kökeni x değişkeninin N kere kendisiyle çarpılmasıdır :

$\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdot \cdot x}_{N \ kere} \equiv x^N$. Bu tanımdan hareketle :

$$x^M \; x^N = x^{M+N} \quad \rightarrow \quad \left[x^M \right]^N = x^{MN} \quad \rightarrow \quad \left[x^M \right]^N = x^{MN} \qquad ,$$

$x^0 = 1 \quad , \quad x^{-N} = \dfrac{1}{x^N} \quad , \quad [\, x\, y\,]^N = x^N \; y^N$ özellikleri kolayca elde

edilir. $x^M \; x^N = x^{M+N}$ eşitliğinin önce $\left[x^{1/N} \right]^N = x$, sonra da

$\left[x^{1/N} \right]^M = x^{M/N}$ olarak genelleşmesi sonucu kuvvetler de tamsayılardan rasyonel sayılara genelleşir. Tüm reel sayılara, istenilen yakınlıkta bir rasyonel sayı bulunabileceği gerçeğinden yola çıkarak da, a ve b reel sayılar olmak üzere

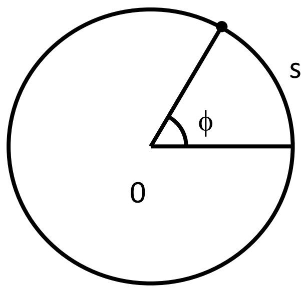
$$x^a \, x^b = x^{a+b} \quad \rightarrow \quad \left[x^a \right]^b = x^{ab}$$

$$x^0 = 1 \quad , \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a} \quad , \quad \left[x\, y \right]^a = x^a \, y^a$$ özelliklerine ulaşılır.

Özetle kuvvet fonksiyonu değişken bir tabanın sabit kuvveti olmaktadır.

B) Trigonometrik Fonksiyonlar

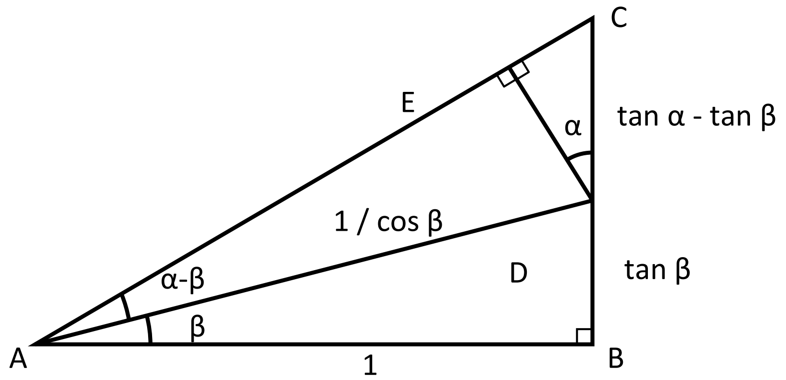
Trigonometrik fonksiyonlarının en önemli iki tanesi, kartezyen koordinatlarda O merkezli bir daire yardımıyla



$$\sin \phi \equiv \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \cos \phi \equiv \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

olarak tanımlanırlar. Diferansiyel özelliklerde kolaylık sağlaması için açılar radyan cinsinden ölçülecektir : $\phi \equiv \frac{s}{R}$. Diğer trigonometrik fonksiyonlarının tanımları ise ilk ikisinin cinsinden $\tan\phi \equiv \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$, $\csc\phi \equiv \frac{1}{\sin\phi}$, $\sec\phi \equiv \frac{1}{\cos\phi}$, $\mathrm{ctn}\phi \equiv \frac{1}{\tan\phi}$ olarak yapılır. Bu tanımlardan öncelikle $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$, sonra da bu bağıntının sırasıyla $\sin^2\phi$ ve $\cos^2\phi$ ile bölünmesinden $\csc^2\phi - \mathrm{ctn}^2\phi = 1$ ve $\sec^2\phi - \tan^2\phi = 1$ özdeşlikleri elde edilir. Bir dik üçgen yardımıyla elde edilen diğer iki yararlı ilişki de $\sin\left(\pi/2 - \phi\right) = \cos\phi$ ve $\cos\left(\pi/2 - \phi\right) = \sin\phi$

bağıntılarıdır. Trigonometrik fonksiyonların en temel cebirsel özdeşliklerinden biri de $\sin(\alpha+\beta)$ formülüdür.



Yukarıdaki şekilde DE uzaklığının iki ayrı biçimde ifade edilmesinden

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$ formülleri elde edilir.

Bu formüllerden $\sin\left(\pi/2 - \phi\right) = \cos\phi$ ve $\cos\left(\pi/2 - \phi\right) = \sin\phi$

bağıntılarının da yardımıyla $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$ formülü

bulunur. $\alpha = \beta = \phi$ özel hali kullanılarak $\sin(2\phi) = 2 \sin\phi \cos\phi$,

$\cos(2\phi) = \cos^2\phi - \sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1 = 1 - 2\sin^2\phi$ 'Çift Açı' formüllerine,

$\cos(2\phi) = 2\cos^2\phi - 1 = 1 - 2\sin^2\phi$ denklemlerine de $\phi = \theta/2$ yerleştirerek

de $\sin\left(\theta/2\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$, $\cos\left(\theta/2\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$ 'Yarım Açı' formüllerine

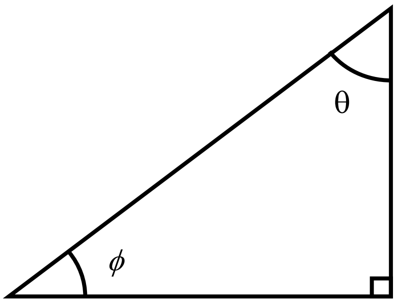
erişilir. Diğer trigonometrik fonksiyonlar için bu temel özdeşliklerin yardımıyla, mesela

$$\tan(2\phi) = \frac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi} \quad , \quad \tan\left(\theta/2\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

elde edilir.

C. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

$x = \mathrm{trig}(\phi)$ fonksiyonlarının $\phi = \mathrm{trig}^{-1}(x)$ olarak ters çevrilmesinden $\sin^{-1}(x)$, $\cos^{-1}(x)$, $\tan^{-1}(x)$, $\csc^{-1}(x)$, $\sec^{-1}(x)$, $\mathrm{ctn}^{-1}(x)$ fonksiyonları tanımlanır. Aşağıdaki dik üçgen yardımıyla



$$\phi + \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \sec^{-1} x + \csc^{-1} x = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \tan^{-1} x + \mathrm{ctn}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

eşitlikleri elde edilir. Ters trigonometrik fonksiyonlar arasındaki daha girift özdeşlikleri elde etmek için tüm trigonometrik fonksiyonlari teker teker diğer tüm trigonometrik fonksiyonlar cinsinden yazabilmek gerekir. Örnek olarak $\tan^{-1} x$ fonksiyonunu $\sin^{-1}\left[F(x)\right]$ olarak yazabilmek için $\sin\phi = \dfrac{\tan\phi}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}$ kullanılır ve $\tan^{-1} x = \sin^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ bulunur.

D) Üstel Fonksiyon

Değişken bir tabanın sabit kuvveti olan kuvvet fonksiyonunun aksine, üstel fonksiyon: sabit bir tabanın değişken kuvvetidir. Diferansiyel özelliklerde kolaylık sağlaması açısından bu sabit taban $\mathrm{e} \equiv \lim\limits_{t \to \infty} \left(1 + 1/t\right)^t = 2.71828\ldots$ olarak seçilir. Bunun gerekçesi ileride anlaşılacaktır. Cebirsel özellikler Sabit - Değişken ayırımı yapmadığı için kuvvet fonksiyonu ilişkilerinden esinlenerek doğrudan

$$\exp(x)\ \exp(y) = \exp(x+y) \quad \rightarrow \quad \left[\ \exp(x)\ \right]^{y} = \exp(xy)$$

$\exp(0) = 1 \quad , \quad \exp(x) = {}^{1}\!/\!{}_{\exp(x)}$ bağıntıları yazılır.

E) Logaritma Fonksiyonu

Tabii logaritma $\ell n(x)$ 'in tanımı $\exp\left[\ell n(x)\right] = x$ olarak yapılırsa

$\exp\left\{\ \ell n\left[\exp(x)\right]\ \right\} = \exp(x) \quad \rightarrow \quad \ell n\left[\exp(x)\right] = x$ oluşu

ℓn ve $\exp$ fonksiyonlarının birbirlerinin ters fonksiyonları olduğunu gösterir.

$$\exp\left[\ell n(xy)\right] = x\,y = \exp\left[\ell n(x)\right]\ \exp\left[\ell n(y)\right] = \exp\left[\ell n(x)+\ell n(y)\right]$$

denklemi yardımıyla önce $\ell n(xy) = \ell n(x)+\ell n(y)$, sonra da $\ell n\left(x^{a}\right) = a\ \ell n\ x$,

$\ell n(1) = 0$, $\ell n\ \left({}^{1}\!/\!{}_{x}\right) = -\,\ell n(x)$, $\ell n(0) = -\infty$ özellikleri elde edilir.

F) Hiperbolik Fonksiyonlar

Birçok fonksiyon $x \rightarrow -x$ 'Yansıma Dönüşümü' altında $F(-x) = +F(x)$ veya $F(-x) = -F(x)$ davranışı gösterir. İlk grubun en basit örneği $F(x) = x^{2N}$, ikinci grubun en basit örneği de $F(x) = x^{2N+1}$ olduğu için $F(-x) = +F(x)$ davranışı gösteren fonksiyonlar 'Çift' , $F(-x) = -F(x)$ davranışı gösterenler ise 'Tek' Fonksiyon olarak adlandırılırlar. $\cos(x)$, $\sin\left(x^{2}\right)$ Çift ; $\tan(x)$, $\sin^{-1}(x)$ Tek fonksiyonlara örnektir. Negatif sayıların logaritması daha tanımlanmadığından $\ell n(x)$ için böyle bir özellik söz konusu bile olamaz. Üstel fonksiyon ise $\exp(-x) \neq \pm\exp(x)$ olduğu için Tek veya Çift değildir. Ancak herhangi bir fonksiyondan yola çıkıp

$\dfrac{F(x)-F(-x)}{2}$ ve $\dfrac{F(x)+F(-x)}{2}$ olarak Tek ve Çift fonksiyonlar oluşturmak mümkündür. Bu metodun üstel fonksiyona uygulanmasından hiperbolik fonksiyonlar elde edilir. Önce $\sinh(x) \equiv \dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$ ve $\cosh(x) \equiv \dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$ olarak tanımlanır, sonra da $\tanh(x) \equiv \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$, $\mathrm{csch}(x) \equiv \dfrac{1}{\sinh(x)}$, $\mathrm{sech}(x) \equiv \dfrac{1}{\cosh(x)}$, $\mathrm{ctnh}(x) \equiv \dfrac{1}{\tanh(x)}$ tanımları yapılır. Hiperbolik fonksiyonlar için neden bu kadar trigonometrik adlara yakın adlar seçildiği ileride anlaşılacaktır. Cebirsel özellikler için önce tanımların karelerini alarak $\cosh^2(x)-\sinh^2(x) = 1$, bunun da $\sinh^2(x)$ ve $\cosh^2 x$ ile bölünmesinden $\mathrm{ctnh}^2(x)-\mathrm{csch}^2(x) = 1$, $\mathrm{sech}^2(x)+\tanh^2(x) = 1$ bağıntıları elde edilir.

Gene ilk tanımlardan yola çıkılarak erişilen

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\ \cosh(y) \pm \cosh(x)\ \sinh(y)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\ \cosh(y) \pm \sinh(x)\ \sinh(y)$$

özdeşliklerin özel hallerinden çift ve yarım değer formülleri :

$$\sinh(2x) = 2\ \sinh(x)\ \cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 1 + 2\ \sinh^2(x) = 2\ \cosh^2(x) - 1$$

$$\sinh\left(\tfrac{y}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(y)-1}{2}} \quad , \quad \cosh\left(\tfrac{y}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(y)+1}{2}}$$

çıkartılır. Bu arada 27 temel fonksiyonun abartılı bir sayı olduğu, hiperbolik fonksiyonlar üstel fonksiyon bileşimleri olduğuna göre şimdilik en azından 27 – 6 = 21 sayısına inilebileceği görülmektedir

G) Ters Hiperbolik Fonksiyonlar

$x = \mathrm{hyp}(y)$ fonksiyonlarının $y = \mathrm{hyp}^{-1}(x)$ olarak ters çevrilmesinden

$$\sinh^{-1}(x) \quad , \quad \cosh^{-1}(x) \quad , \quad \tanh^{-1}(x) \quad , \quad \mathrm{csch}^{-1}(x) \quad , \quad \mathrm{sech}^{-1}(x) \quad , \quad \mathrm{ctnh}^{-1}(x)$$

fonksiyonları elde edilir. Hiperbolik fonksiyonların üstel fonksiyonla çok yakından ilintili olması, ters hiperbolik fonksiyonların da logaritma ile ilintili olmasına işaret etmektedir. Bir örnek olarak $\cosh^{-1}(x) = \ell n\left[F(x)\right]$, $F(x) = ?$ problemine eğilirsek

$x = \cosh\left[\ell n\, F\right] \quad \to \quad 2\,x = F + \dfrac{1}{F}$ ve sonuçta $F(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ olduğu görülür. Bu özdeşliklerin tamamı :

$$\sinh^{-1}(x) = \ell n\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad , \quad \cosh^{-1}(x) = \ell n\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\,\ell n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad , \quad \mathrm{csch}^{-1}(x) = \ell n\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$$

$$\mathrm{sech}^{-1}(x) = \ell n\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad , \quad \mathrm{ctnh}^{-1}(x) = \frac{1}{2}\,\ell n\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

olmaktadır. Bundan dolayı ters hiperbolik fonksiyonların da listeden düşülebileceği ve listenin 21 – 6 = 15 fonksiyona indiği görülmektedir. Bu sayıyı 3 'e indirmek için kompleks sayılar konusunu beklemek gerekecektir.

PROBLEMLER

P.III.1) $\sin$, $\cos$, $\tan$ fonksiyonları için tüm çift ve yarım açı formüllerini elde edin.

P.III.2) Tabloyu tamamlayın :

$$\sin^{-1}(x) \;=\; \cos^{-1}(?) \;=\; \tan^{-1}(?) \;=\; \csc^{-1}(?) \;=\; \sec^{-1}(?) \;=\; \text{ctn}^{-1}(?)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\sin^{-1}(?) \;=\; \cos^{-1}(?) \;=\; \tan^{-1}(?) \;=\; \csc^{-1}(?) \;=\; \sec^{-1}(?) \;=\; \text{ctn}^{-1}(x)$$

P.III.3) $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ fonksiyonları için tüm çift ve yarım değer formüllerini elde edin.

P.III.4) Tabloyu tamamlayın :

$$\sinh^{-1}(x) \;=\; \cosh^{-1}(?) \;=\; \tanh^{-1}(?) \;=\; \text{csch}^{-1}(?) \;=\; \text{sech}^{-1}(?) \;=\; \text{ctnh}^{-1}(?)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\sinh^{-1}(?) \;=\; \cosh^{-1}(?) \;=\; \tanh^{-1}(?) \;=\; \text{csch}^{-1}(?) \;=\; \text{sech}^{-1}(?) \;=\; \text{ctnh}^{-1}(x)$$

P.III.5) Tüm ters hiperbolik fonksiyonları logaritma olarak ifade edin.

P.III.6) i) $\tanh\left[\ell n(x)\right] \;=\; ?$, ii) $x^{\frac{1}{\ell n(x)}}$

iii) $\sin\left[2\,\sin^{-1}(0.8)\right] \;=\; ?$, iv) $\sinh\left[\ell n(3)\right] \;=\; ?$

v) $\tan^{-1}(a) - \tan^{-1}(b) \;=\; \tan^{-1}\left[F(a,b)\right] \;\rightarrow\; F(a,b) \;=\; ?\ \tan^{??}(a)$

P.III.7) $\cos(20^o)\ \cos(40^o)\ \cos(80^o) \;=\; \dfrac{1}{8}$ olduğunu gösterin.

P.III.8) Aşağıdaki mantık hatasını bulun :

$$\theta \simeq \pi/2 \quad \to \quad \tan\theta \; >> \; 1 \quad \to \quad \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \; >> \; 1 \quad \to$$

$$\to \quad \sin^2\theta \; >> \; 1-\sin^2\theta \quad \to \quad 2 \; > \; 2\,\sin^2\theta \; >> \; 1 \quad \to \quad 2 \; >> \; 1$$

P.III.9) $F(x) = \dfrac{x}{\exp(x)-1} + \dfrac{x}{2}$ fonksiyonunun yansıma özelliğini bulun.

IV. SAYISAL ÖZELLİKLER

A) Genel

Verilen bir x için $F(x)$ değerini, elektronik destek olmaksızın, yaklaşık olarak hesap edebilmek yararlı bir beceridir. Kuvvet ve üstel fonksiyonlar sayısal düzeyde aynı oldukları için sadece birini incelemek yeterlidir. Öte yandan bir fonksiyonun sayısal değerlendirilmesi aynı zamanda ters fonksiyonun da değerlendirilmesi demektir. Bu yüzden sadece $\sin(x)$ ve $\ell n(x)$ fonksiyonlarının sayısal olarak incelenmesi yeterli olacaktır.

B) Trigonometrik Fonksiyonlar

İleride anlaşılacak bir sebeple $\sin(A^o)$ yaklaşık olarak :

$$\sin(A^o) \simeq \frac{A}{56} \quad , \quad 0 \le A \le 14 \qquad ; \quad \sin(A^o) \simeq \frac{A}{60} \quad , \quad 15 \le A \le 35$$

formülleriyle verilir. Bu formüller, bazı önemli açılar için oluşturulan

Açı	$\sin\left(A^o\right)$	$\cos\left(A^o\right)$
-----	-----------------------	------------------------
0°	$\sqrt{0}/2 = 0.000$	$\sqrt{4}/2 = 1.000$
30°	$\sqrt{1}/2 = 0.500$	$\sqrt{4}/2 = 1.000$
45°	$\sqrt{2}/2 = 0.707$	$\sqrt{2}/2 = 0.707$
60°	$\sqrt{3}/2 = 0.866$	$\sqrt{1}/2 = 0.500$
90°	$\sqrt{4}/2 = 1.000$	$\sqrt{0}/2 = 0.000$

tablosu ve bilinen cebirsel özellikler yardımıyla tüm açıların tüm trigonometrik fonksiyonları yaklaşık olarak hesaplanabilir.

C) Logaritma

Logaritma için ise 10 tabanına Briggs logaritması ile başlamak daha uygundur. İlk aşamada sadece $\log 2 = 0.301$, $\log 3 = 0.477$ ve $\log 7 = 0.845$ değerlerinin bilinmesi yeterli olacaktır.

$2^{10} = 1024 \simeq 10^3 \quad \rightarrow \quad \log 2 \approx 0.300$

$3^4 \simeq 2^3\ 10 \quad \rightarrow \quad \log 3 \simeq 0.475$

$7^2 \simeq 50 \quad \rightarrow \quad \log 7 \simeq 0.850$

ilişkileri bu üç yapıtaşının elde edilişine ışık tutmaktadır. Bu noktada $\ell n\, x$ fonksiyonuna geçmek için $\ell n\, 10 \simeq 2.3$, dolayısıyla $\ell n\, x \simeq 2.3 \log x$ eşitliği devreye girer ve aşağıdaki tablo elde edilir. [3]

N	$\log(N)$	$\ell n(N)$
1	0.000	0.0
2	0.301	0.7
3	0.477	1.1
4	0.602	1.4
5	0.699	1.6
6	0.778	1.8
7	0.845	1.95
8	0.903	2.1
9	0.954	2.2
10	1.000	2.3

Bunların yardımıyla tüm kuvvet, logaritma, üstel, hiperbolik, ters hiperbolik fonksiyonlar yaklaşık olarak hesaplanabilirler.

PROBLEMLER

P.IV.1) Hesap makinesi kullanmadan yaklaşık sayısal sonuç bulun.

i) $\cos\left(66^o\right) = ?$ ii) $\sin^{-1}(0.125) = ?$

iii) $\cosh\left[\ell n(2)\right] = ?$ iv) $(63)^{1/3} = ?$

v) $\log_8(32) = ?$ vi) $(1.001)^{10000} = ?$

vii) $\ell n(20) = ?$ viii) $\ell n\ (2000) = ?$

ix) $\log(75) = ?$ x) $\log_{32}(8) = ?$

xi) $(0.99)^{300} = ?$

xii) $\sin\left(67^o\right) = ?$

xiii) $\sin\left(74^o\right) = ?$

xiv) $\cos\left(83^o\right) = ?$

xv) $\tanh(2.3) = ?$

xvi) $\sinh^{-1}(100) = ?$

xvii) $\sin^{-1}(0.14) = ?$

xviii) $\tan^{-1}(20) = ?$

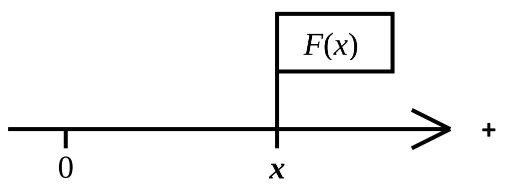
xix) $\tan^{-1}(5) = ?$

P.IV.2) $(8)^{256}$ sayısının ilk ve son hanelerini bulun.

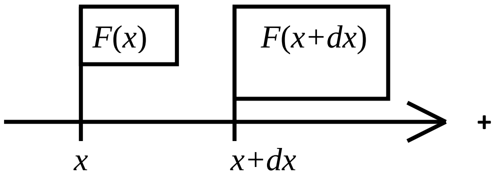
V. DİFERANSİYEL ÖZELLİKLER

A) Genel Özellikler

Bir fonksiyonu gözümüzde canlandırmanın fonksiyon tablosu ötesinde yolları vardır. Mesela önce bir reel sayı doğrusu çizer, bunun üzerinde sıfır noktası O 'yu belirler, pozitif yönü de geleneklere uygun olarak sağa doğru seçeriz. Artık bu doğru üzerinde her P noktası, OP uzaklığının boyu olan x değeri ile parametrize edilebilir. Her x değerine karşılık gelen $F(x)$ değerini ise x noktasına dikili bir bayrağın üzerine yazarak gösterebiliriz.



Bayrağa alternatif olarak $F(x)$ uzunluğunda bayrak direkleri de kullanılabilir. Bu gösterimde x boyutuna ek olarak, buna dik ve geometrik anlamı olan ikinci bir boyut devreye girmektedir. Bu iki boyutlu yaklaşım 'Kartezyen Koordinat Sistemi' olarak adlandırılır. Ancak bağımsız ve bağımlı kompleks değişkenler ikişerden dört boyut gerektireceği için kartezyen gösterimi kompleks değişkenli fonksiyonlara genellemek mümkün değildir. Bu yüzden, genelleşme kolaylığı açısından bayrak gösterimine bağlı kalınacaktır. Birbirine sonsuz küçük uzaklıkta olan x ve $x+dx$ noktalarındaki bayrak değerlerinin farkı o fonksiyonun diferansiyeli olarak adlandırılır.



$$dF(x) \equiv F(x+dx) - F(x)$$

Bu tanımda yer alan dx aslında sıfır olan, ancak değişik mertebe sıfırların muhasebesini tutabilmek açısından katlanmak zorunda kaldığımız sonsuz küçük bir reel eksen parçasıdır. Dolayısıyla hesaplarda $(dx)^1 = dx$ ama $N \geq 2$ için $(dx)^N = 0$ kullanılacaktır. Biraz şiirsel bir anlatımla dx 'i sıfır boyutlu bir doğru parçası veya bir boyutlu bir nokta olarak da düşünebiliriz. Türev ise $dF(x)$ diferansiyelinin, iki bayrak direği arasındaki dx uzaklığına oranı olarak tanımlanır :

$F'(x) \equiv \dfrac{dF(x)}{dx} \equiv \dfrac{F(x+dx)-F(x)}{dx}$. Türev için daha kısa $F'(x)$ ifadesini Newton 'a, $\dfrac{dF(x)}{dx}$ oran ifadesini ise Leibniz 'e borçluyuz. Hesaplarda en geçerli yol, anlam açısından daha zengin Leibniz ifadesini hep akılda tutmak şartıyla, daha ekonomik Newton ifadesini kullanmaktır. Ancak mesela Zincir Kuralı 'nı elde ederken Leibniz gösteriminin kullanılması kaçınılmazdır. Bu kurala göre $F[u(x)]$ gibi bir fonksiyonun türevi $\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{dF}{du}\dfrac{du}{dx}$ olmaktadır. Mesela $F(x) = \sin(x^3)$ için

$\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{d\ \sin(x^3)}{d(x^3)}\dfrac{d(x^3)}{dx} = 3\,x^2\ \cos(x^3)$ olur. Türev tanımında sağdan yaklaşım $F'(x) \equiv \dfrac{F(x+dx)-F(x)}{dx}$ yerine pekala soldan yaklaşım $F'(x) \equiv \dfrac{F(x)-F(x-dx)}{dx}$ da benimsenebilirdi. Akla gelebilecek

$$F'(x) \equiv \frac{F\left(x+\frac{1}{3}\,dx\right)-F\left(x-\frac{2}{3}\,dx\right)}{dx}$$ benzeri tüm tanımlar bu iki temel yaklaşımın bileşimidir. $F'(x)$ kavramının x noktasında tanımlı ve anlamlı olabilmesi için iki temel yaklaşımın aynı sonucu vermesi gerekir. Türevin yaklaşım yönünden bağımsız olması şartı ileride kompleks değişkenli fonksiyon türevlerinin incelenmesinde olağanüstü bir önem kazanacaktır. Yukarıda verilen, Newton, Leibniz ve Euler 'in sezgiye dayalı yaklaşımları zaman içinde yeterli ölçüde matematik katılığa sahip bulunmadı. Weierstrass'ın daha törensel $\delta - \varepsilon$ yaklaşımı konuya egemen oldu. Ancak, pratik önemi şüpheli birkaç istisna dışında, doğru sonuçları en kısa yoldan veren tarihsel yaklaşım günümüzde 'Nonstandard Analysis' adıyla tekrar benimsenme eğilimi gösteriyor.[(4)] Türeve geometrik bir anlam vermek istenirse kartezyen gösterime geçmek gerekir. Bu gösterimde, bayrak direklerinin tepelerinden geçen fonksiyon eğrisinin yatayla yaptığı açı ϕ olmak üzere, $F'(x) = \tan\phi$ olacaktır.

Özetle : türev, kartezyen gösterimde eğimin ölçüsüdür. Türev tanımını temel fonksiyonlara uygulamadan önce bazı fonksiyon bileşimlerinin türevlerini elde etmek yerinde olur. Temel türev tanımı kullanılarak

$$[F+G]' = F'+G' \quad ; \quad [k\,F]' = k\,F'$$

$$[F\,G]' = F'\,G+F\,G' \quad ; \quad \left[\frac{1}{G}\right]' = -\frac{G'}{G^2}$$

elde edilir. Bu eşitlikler ve cebirsel özellikler yardımıyla türev tanımını 27 fonksiyondan sadece 3 'ü için kullanmak yeterli olacaktır.

Ters fonksiyon türevlerinin genel bir formülü

$$y = F^{-1}(x) \quad \to \quad x = F(y) \quad \to \quad \frac{dx}{dy} = F'(y) \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{F'(y)}$$

$$\therefore \qquad \left[F^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{F'\left[F^{-1}(x)\right]}$$ olarak elde edilir.

B) Kuvvet Fonksiyonu

Kuvvet fonksiyonunun türev ifadesi birkaç aşamada elde edilecektir. Önce pozitif tamsayı

M için : $\left[x^M\right]' \equiv \dfrac{(x+dx)^M - (x)^M}{dx}$ tanımında Pascal üçgeni yardımıyla

$(x+dx)^M = x^M + M\, x^{M-1}\, dx$ ve $\left[x^M\right]' = M\, x^{M-1}$ sonucu elde edilir.

$y = x^{1/N}$ fonksiyonunun türevini bulmak için ise ters fonksiyon kavramından yararlanılarak

$x = y^N \rightarrow \dfrac{dx}{dy} = N\, y^{N-1} \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^{1-N}}{N} = \dfrac{1}{N}\, x^{1/N\,-\,1}$ bulunur.

Bu iki formülden ve zincir kuralından yararlanarak da $\left[x^{M/N}\right]' = \dfrac{M}{N}\, x^{M/N\,-\,1}$

formülüne erişilir. Negatif kuvvetler için ise $\left[\dfrac{1}{G}\right]' = -\dfrac{G'}{G^2}$ yardımıyla gene aynı

biçimde $\left[x^{-M/N}\right]' = -\dfrac{M}{N}\, x^{-M/N\,-\,1}$ olmaktadır. Tüm reel sayılara istenilen yakınlıkta

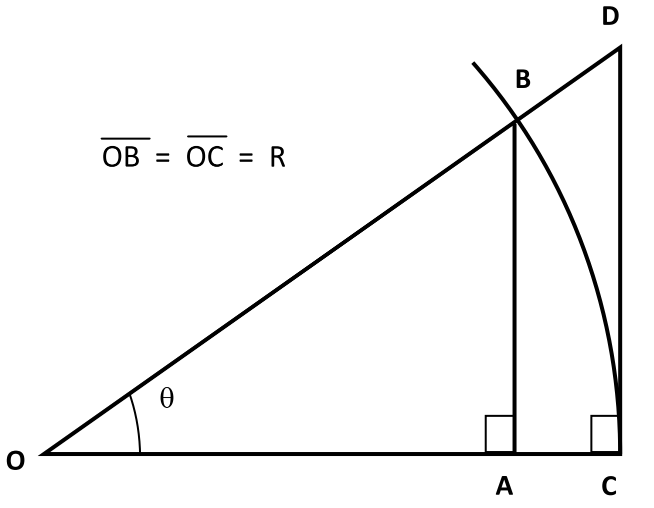
bir rasyonel sayı bulunabileceği için de her $a \in \mathcal{R}$ için $\left[x^a\right]' = a\, x^{a-1}$ olur.

C) Trigonometrik Fonksiyonlar

$[\sin\, x]' \equiv \dfrac{\sin(x+dx) - \sin(x)}{dx}$ tanımının açılımından

$\left[\dfrac{\cos(dx)-1}{dx}\right] \sin\, x + \left[\dfrac{\sin(dx)}{dx}\right] \cos x$ elde edilir.

$\left[\dfrac{\sin(dx)}{dx}\right]$ ifadesini eğerlendirmek için



OAB üçgeni , OCB daire dilimi ve OCD üçgeni alanlarının, eşitlik sadece $\theta = 0$ için geçerli olmak üzere, $\frac{R^2 \sin\theta \cos\theta}{2} \le \frac{\theta}{2\pi} \pi R^2 \le \frac{R^2 \tan\theta}{2}$

olarak sıralandıkları gözlenir. Bundan da $\cos\theta \le \frac{\theta}{\sin\theta} \le \frac{1}{\cos\theta}$ eşitsizliği elde edilir.

$\theta \to 0$ olurken iki tane 1 arasında kalan $\frac{\theta}{\sin\,\theta}$ da 1 olmak zorundadır.

Dolayısıyla $\frac{\sin(dx)}{dx} = 1$ bulunur. $\left[\frac{\cos(dx)-1}{dx}\right]$ ifadesi ise $\left[\frac{\cos(dx)+1}{\cos(dx)+1}\right]$ ile

çarpılarak $-\frac{\sin(dx)}{dx}\,\frac{\sin(dx)}{\cos(dx)+1} = -1 \times \frac{0}{2} = 0$ bulunmakta, böylece

$[\sin x]' = \cos x$ olmaktadır. $[\cos x]'$ için ise $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

özdeşliğinin türevi alınarak, $\left[F^2\right]' = 2\,F\,F'$ yardımıyla

$2\,\sin x\,[\sin x]' + 2\,\cos x\,[\cos x]' = 0 \quad \to \quad [\cos x]' = -\sin x$ bulunur.

$y = \sin^{-1} x$ fonksiyonunun türevi için, tüm ters fonksiyon türevleri için geçerli olacak

yolumuz $y = \sin^{-1} x \to x = \sin y \to \frac{dx}{dy} = \cos y \to$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to \left[\,\sin^{-1} x\,\right]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ olacaktır.

D) Logaritma Fonksiyonu

$$\left[\ell n(x)\right]' \equiv \frac{\ell n(x+dx)-\ell n(x)}{dx}$$ tanımını

$$\frac{1}{dx}\,\ell n\left(\frac{x+dx}{x}\right) = \frac{1}{x}\,\frac{x}{dx}\,\ell n\left(1+\frac{dx}{x}\right) = \frac{1}{x}\,\ell n\left[\left(1+\frac{dx}{x}\right)^{\frac{x}{dx}}\right]$$ olarak yazıp

$e \equiv \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+1/t\right)^t$ tanımı hatırlanarak $\left[\ell n(x)\right]' \equiv \dfrac{1}{x}\,\ell n\, e = \dfrac{1}{x}$ sonucuna erişilir. Ters fonksiyon türevi metodu bir kere daha uygulanarak

$$y = \exp(x) \quad\rightarrow\quad x = \ell n(y) \quad\rightarrow\quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{dx} = y = \exp(x)$$ yani

$\left[\exp(x)\right]' = \exp(x)$ bulunur. Bu noktadan sonra tüm hiperbolik ve ters hiperbolik fonksiyon türevleri basit bir şekilde elde edilir. Tüm sonuçların özetlendiği Türev Tablosu aşağıda verilmektedir. $\left[\tanh^{-1} x\right]' = \left[\mathrm{ctnh}^{-1} x\right]'$ eşitliğini anlamak için kompleks değişkenli fonksiyonların incelenmesini beklemek gerekecektir.

TÜREV TABLOSU

$F(x)$	$F'(x)$
$F+G$	$F'+G'$
$k\,F$	$k\,F'$
$F\;G$	$F'\;G + F\;G'$
$\dfrac{1}{G}$	$-\dfrac{G'}{G^2}$
$F\left[u(x)\right]$	$\dfrac{dF}{du}\,\dfrac{du}{dx}$

$F^{-1}(x)$	$\dfrac{1}{F'\left[F^{-1}(x)\right]}$
x^a	$a\,x^{a-1}$
$x^{b+1}\big/b+1$	x^b
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\csc x$	$-\dfrac{\cos\ x}{\sin^2 x}$
$\sec x$	$\dfrac{\sin\ x}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctn} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\sin^{-1}\ x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1}\ x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1}\ x$	$\dfrac{1}{1+x^{\,2}}$
$\csc^{-1}\ x$	$-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\sec^{-1}\ x$	$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{ctn}^{-1} x$	$-\dfrac{1}{1+\mathrm{x}^{\,2}}$
$\ell n(x)$	$1\big/x$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$

$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\csc x$	$\dfrac{\cosh\ x}{\sinh^2 x}$
$\text{sech}\, x$	$-\dfrac{\sinh\ x}{\cosh^2 x}$
$\text{ctnh}\, x$	$-\dfrac{1}{\sinh^2 x}$
$\sinh^{-1}\ x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh^{-1}\ x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh^{-1}\ x$	$\dfrac{1}{1-x^{\,2}}$
$\text{csch}^{-1}\ x$	$-\dfrac{1}{x\ \sqrt{x^2+1}}$
$\text{sech}^{-1}\ x$	$-\dfrac{1}{x\ \sqrt{1-x^2}}$
$\text{ctnh}^{-1}\ x$	$\dfrac{1}{1-x^{\,2}}$

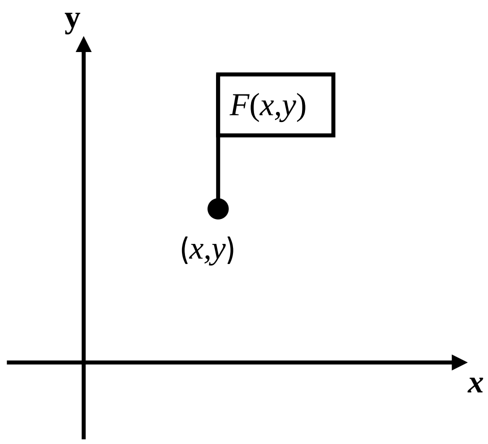
E) Kapalı Türev

Türevle ilgili bir konu da 'kapalı türev' kavramıdır. Bazen başlangıç noktası $y = y(x)$ haline indirgenemez bir $\Phi(\ x\ ,\ y\ ) = 0$ denklemi olabilir. Bu durumda türev için $y' = y'(x)$ biçiminden vazgeçer $y' = y'(x,y)$, hatta $\Psi(\ x, y, y'\ ) = 0$ biçimine razı oluruz. Mesela $x\ \exp(y) + y = 0$ durumunda y' bulmak için tüm denklemin türevini, zincir kuralı da kullanarak $\exp(y) + x \exp(y)\, y' + y' = 0$

olarak bulur ve $y' = -\dfrac{\exp(y)}{x \exp(y) + 1}$ sonucuna ulaşırız.

F) Kısmi Türev

Bir bağımlı değişkenin, yani fonksiyonun, birden fazla bağımsız değişkene bağlı olduğu durumlarda diferansiyel özellikler daha karmaşık olacaktır. Bunun en basit örneği olan $F(x,y)$ fonksiyonunu, birbirinden bağımsız iki değişkenin oluşturduğu x - y düzlemine dikili bayraklar yardımıyla inceleyelim.



Diferansiyel tanımı, gene aynı esaslara bağlı olarak, birbirine sonsuz yakın iki noktadaki bayrak değerlerinin farkı olarak yapılır : $dF(x,y) \equiv F(x+dx, y+dy) - F(x,y)$.

Ancak bu durumda türev tanımına geçebilmek için hangi paydaya bölünmesi gerektiği belli değildir. Bu yüzden diferansiyel önce

$$dF(x,y) = F(x+dx, y+dy) - F(x, y+dy) + F(x, y+dy) - F(x,y)$$

sonra da terimler ikişerden gruplanarak :

$$dF(x,y) = \left[\frac{F(x+dx, y+dy) - F(x, y+dy)}{dx}\right] dx + \left[\frac{F(x, y+dy) - F(x,y)}{dy}\right] dy$$

olarak yazılır. Kare parantezler içindeki ifadeler türev tanımına çok yakın, ancak değişik işlemlerdir. Bu yeni işlemde esas olan, türev alınan değişken dışındaki değişkenin sabit kalmasıdır. Bu yeni işlem 'Kısmi Türev' olarak adlandırılır ve yeni sembollerle

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{F(x+dx,y)-F(x,y)}{dx} \quad ; \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{F(x,y+dy)-F(x,y)}{dy}$$

olarak tanımlanır. Kısmi türev işlem olarak bayağı türev ile aynıdır, ancak mesela $\frac{\partial F}{\partial x}$ hesaplanırken x 'den başka tüm değişkenlere sanki sabitmiş gibi davranmak gerekir.

Buna göre $F(x,y) = x \sin y + x^3$ için $\frac{\partial F}{\partial x} = \sin y + 3x^2$;

$\frac{\partial F}{\partial y} = x \cos y$ bulunur. Bu örnek için geçerli olan $\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} = \cos y$;

$\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} = \cos y$ eşitliği rastlantı değildir. Kısmi türev tanımı gereği her

durumda $\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x}$ olacaktır.[5] Kısmi türev işlemleri ile ilgili bir uyarı :

Bayağı türev, gerçek anlamda iki diferansiyelin oranı olduğu için $\left[\frac{dF}{dx}\right]^{-1} = \frac{dx}{dF}$ olması doğaldır. Kısmi türevde ise pay gerçek bir diferansiyel olmadığı için $\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]^{-1} = \frac{\partial x}{\partial F}$ denemez. İlginç bir örnek : $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi \equiv \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ polar koordinatlarda $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\phi$ olmaktadır.

G) Belirsiz İntegral

Türevi bilinen bir fonksiyonun kendisini bulma işlemine integral denir. Stilize bir S harfi ve integral değişkeninin diferansiyeli ile gösterilen bu işlem

$\int dx\, F'(x) \;\equiv\; F(x) + C$ veya $\int dF(x) \;\equiv\; F(x) + C$ olarak tanımlanır.

Sabitlerin türevi sıfır olduğu için her integral işleminde böyle keyfi bir integral sabiti yer alır ve işlem 'Belirsiz İntegral' olarak adlandırılır. Ancak matematiğin doğaya uygulanmasında keyfiliğe yer olamayacağı için bu sabitler, verilen bazı 'Sınır Şartları' veya 'İlk Şartlar' yoluyla değerlendirilir. Temel fonksiyonlarla ilgili diferansiyel ve bunun tersi olan integral işlemi hakkında tüm bilgilerin dökümü aşağıdaki tabloda verilmektedir.

DİFERANSİYEL VE İNTEGRAL TABLOSU

$$d[F+G] = dF + dG \quad \rightarrow \quad \int dF + \int dG = F+G+C$$

$$d[k\,F] = k\,dF \quad \rightarrow \quad \int \mathrm{k\ dF} = \mathrm{k\,F} + \mathrm{C}$$

$$d[F\,G] = dF\,G + F\,dG \quad \rightarrow \quad \int dF\,G + \int F\,dG = F\,G + C$$

$$d\left[\frac{1}{G}\right] = -\frac{d\,G}{G^2} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dG}{G^2} = -\frac{1}{G} + C$$

$$d\left[\frac{x^{b+1}}{b+1}\right] = x^b\,dx \quad \rightarrow \quad \int x^b\,dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + C$$

$$d\,\sin x = \cos x\,dx \quad \rightarrow \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$d\,\cos x = -\sin x\,dx \quad \rightarrow \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$d\,\tan x = \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$d\,\csc x = -\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} = -\csc x + C$$

$$d\,\sec x = \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = \sec x + C$$

$$d\,\mathrm{ctn}\,x = -\frac{dx}{\sin^2 x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctn}\,x + C$$

$$d\,\sin^{-1} x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$$

$$d\,\cos^{-1} x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$$

$$d\ \tan^{-1} x = \frac{dx}{1+x^2} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$$

$$d\ \csc^{-1} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\csc^{-1} x + C$$

$$d\ \sec^{-1} x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C$$

$$d\ \mathrm{ctn}^{-1} x = -\frac{dx}{1+x^2} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = -ctn^{-1} x + C$$

$$d\ \ell n\, x = \frac{dx}{x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \ell n\, x + C$$

$$d\ \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\, dx \quad \rightarrow \quad \int \mathrm{e}^x\, dx = \mathrm{e}^x + C$$

$$d\ \sinh x = \cosh x\, dx \quad \rightarrow \quad \int \cosh x\, dx = \sinh x + C$$

$$d\ \cosh x = \sinh x\, dx \quad \rightarrow \quad \int \sinh x\, dx = \cosh x + C$$

$$d\ \tanh x = \frac{dx}{\cosh^2 x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$$

$$d\ \mathrm{csch}\, x = \frac{\cosh x\, dx}{\sinh^2 x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{\cosh x\, dx}{\sinh^2 x} = \mathrm{csch}\, x + C$$

$$d\ \mathrm{sech}\, x = -\frac{\sinh x\, dx}{\cosh^2 x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{\sinh x\, dx}{\cosh^2 x} = -\mathrm{sech}\, x + C$$

$$d\ \mathrm{ctnh}\, x = -\frac{dx}{\sinh^2 x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\mathrm{ctnh}\, x + C$$

$$d\ \sinh^{-1} x = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x + C$$

$$d\ \cosh^{-1} x = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1} x + C$$

$$d\ \tanh^{-1} x = \frac{dx}{1-x^2} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1} x + C$$

$$d\ \mathrm{csch}^{-1} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = -\mathrm{csch}^{-1} x + C$$

$$d\ \mathrm{sech}^{-1} x = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\mathrm{sech}^{-1} x + C$$

$$d\ \mathrm{ctnh}^{-1} x = \frac{dx}{1-x^2} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{ctnh}^{-1} x + C$$

Bu temel formüllerin dışındaki integralleri değerlendirmenin iki ana yolu : 'Değişken Dönüşümü' ve 'Parçalı İntegral' metotlarıdır. Değişken dönüşümü : çözülemeyen bir $\int dx\, f(x)$ integralinde $u = u(x)$ dönüşümü yapmak ve yeni integral eskisinden daha kolay olmak üzere $\int dx\, f(x) = \int du\, g(u)$ elde etmeğe dayalı bir yoldur. Parçalı integral metodunun temelinde ise $d[F\, G] = dF\, G + F\, dG$ özdeşliği yatar. Bundan elde edilen $\int F\, dG = F\, G - \int G\, dF$ eşitliğinde $\int F\, dG$ zor olsa bile $\int G\, dF$ kolay bir integral ise çözüm bulunmuş demektir. İki metodu da içeren tek bir örnek olan $\int dx\, \sin^{-1} x$ integralinde $F = \sin^{-1} x$, $G = x$ seçimi yapılarak ve

$dF = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $dG = dx$ kullanılarak

$\int dx\, \sin^{-1} x = x\, \sin^{-1} x - \int \dfrac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ bulunur.

Bu noktada ise $u = \sqrt{1-x^2}$, $du = -2\, x\, dx$ yardımıyla

$\int dx\, \sin^{-1} x = x\, \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$ sonucuna ulaşılır. Ancak birçok fonksiyonun integralinin temel fonksiyonlar kullanarak ifade edilemeyeceği de bir gerçektir. Böyle durumlarda son çare olarak kapsamlı bir integral tablosuna başvurmak gerekir. İntegral işlemi türevden daha zordur; zira bileşenleri temel fonksiyonlar olan bir fonksiyonun türevi de temel fonksiyonlardan oluşur. Bu basit fonksiyonlar kümesi 'nin türev işlemi altında kapalı olması demektir. Ancak bu kapalılık integral işlemi için geçerli değildir.

H) Belirli İntegral

Uygulamalı matematikte çok kullanılan bir işlemin programı :

i) Belirsiz integrali bul,

ii) Sonucu $x = a$ 'da değerlendir,

iii) Sonucu $x = a$ 'de değerlendir,

iv) (iii) 'den (ii) 'yi çıkart;

olmaktadır. (iv) 'üncü işlem keyfi integral sabitini yok ettiği için bu işlem 'Belirli İntegral'

olarak adlandırılır ve $\int_a^b dx\, F'(x) = \int_a^b dF(x) \equiv F(b) - F(a)$ olarak

tanımlanır. Mesela $\int_0^1 dx\, \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - 1$ olur.

Bu tanımdan hareketle, belirli integraller için :

$$\int_a^b dx\, f(x) + \int_b^c dx\, f(x) = \int_a^c dx\, f(x)$$

$$\int_a^b dx\, f(x) = -\int_b^a dx\, f(x)$$

$$\int_a^a dx\, f(x) = 0$$

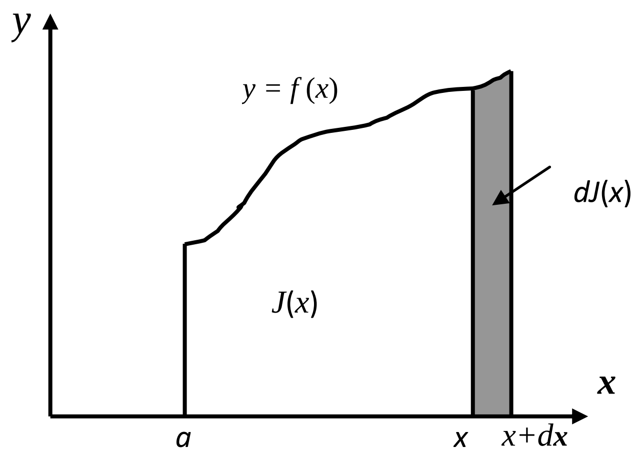
$$\int_a^{a+d\xi} dx\, f(x) = f(a)\, d\xi$$

özellikleri kolayca elde edilir. Ayrıca özel simetrik sınırlar için

$$f(-x) = f(x) \quad \rightarrow \quad \int_{-a}^{a} dx\, f(x) = 2\int_0^a dx\, f(x)$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \rightarrow \quad \int_{-a}^{a} dx\, f(x) = 0$$

bağıntılarını çıkartmak da zor değildir. Bir belirli integralin sonucu integral değişkeninden bağımsızdır ve sadece alt ve üst sınırların fonksiyonudur. Bu işlemde hayati bir nokta $F'(x)$ fonksiyonunun tüm $[\,a\,,\,b\,]$ aralığında tanımlı olmasıdır. Buna dikkat edilmezse $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2} = -1$ gibi saçma ve anlamsız sonuçlarla karşılaşılır. İntegral işlemine geometrik bir anlam vermek için $[\,a\,,\,x\,]$ aralığında $f(x)$ eğrisinin altında kalan $J(x)$ alanını incelemek gerekir.



Görüldüğü gibi son ince dikdörtgen şerit alanı $dJ(x) = f(x)\,dx$ veya $J(x) = \int_a^x dx\; f(x)$ olmaktadır. Dolayısıyla integral işleminin geometrik yorumu bir fonksiyonun altında kalan alanın bulunmasıdır. Bu geometrik yorum $\int_a^b dx\; f(x)$ işlemine yeni bir yaklaşım getirmektedir. $[\,a\,,\,b\,]$ aralığında, $f(x)$ eğrisinin altında kalan alan, sonlu sayıda ince şerit alanının toplamına yaklaşık olarak eşittir. Şerit enleri sıfır, dolayısıyla şerit sayısı sonsuz olurken yaklaşıklık da yerini kesinliğe bırakır. Bunun bayrak gösterimindeki eşdeğeri : $[\,a\,,\,b\,]$ aralığını N parçaya bölmek, her $(\Delta x)_i$ parçası uzunluğunu, o parçanın orta noktasındaki bayrak değeriyle çarpıp, toplam almaktır.

$\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,(\Delta x)_i$ toplamının $N \to \infty$, $(\Delta x)_i \to 0$ limiti $\int_a^b dx\; f(x)$ olacaktır. Bu yaklaşım, ileride kompleks değişkenli fonksiyonlarda büyük önem kazanacak olan 'Yol İntegrali' kavramının ilk adımıdır.[6] Son bir nokta ise belirli integral işlemlerinde, o kadar zahmet sonucu, sadece tek bir sayı elde edilmesi bu işlemin ekonomik bir işlem olmadığını göstermektedir. Belirsiz integral aşamasında elde sayılamaz sonsuz noktada değeri bilinen bir fonksiyon varken bunu sadece iki uç noktada değerlendirip, fark almak çok büyük bir bilgi kaybıdır. Belirli integrallerin daha ekonomik bir biçimde değerlendirilmeleri kompleks değişkenli fonksiyonların incelenmesi sırasında sağlanacaktır. Bu metotla belirsiz integrali bilinmeyen fonksiyonların bile bazı özel belirli integrallerini değerlendirmek mümkün olacaktır.

I) Tekrar Belirsiz İntegral

$f \;=\; F'$ durumunda $\int_a^b dt\, f(t) \;=\; \int_a^b dx\, f(x) \;\equiv\; F(b)-F(a)$ olduğu görülmüştü.

Sınırlardan biri değişken yapılırsa, belirli integral görünümünde bir belirsiz integral elde edilir.

Bu durumda $\int_a^x dt\;\; f(t) \;=\; \int_a^x dx\, f(x) \;\equiv\; F(x)-F(a)$ olacaktır. Bu noktada temel türev tanımı kullanılarak $\dfrac{d}{dx}\int_a^x dt\, f(t) \;=\; f(x)$ veya biraz daha gayretle çok daha genel

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} dt\;\; f(t,x) \;=\; \int_{a(x)}^{b(x)} dt\;\; \frac{\partial f(t,x)}{\partial\, x} \;+\; f\left[b(x),x\right]\frac{db(x)}{dx} \;-\; f\left[a(x),x\right]\frac{da(x)}{dx}$$

Leibniz formülüne ulaşılır.

J) Dirac Delta Fonksiyonu

İleriki uygulamalarda önem kazanacak bir konuya bu noktada eğilmek uygun olacaktır. Gerçek anlamda bir fonksiyon olmayan ancak bazı çift fonksiyonların limiti olan Dirac delta fonksiyonu $\delta(x)$ ile gösterilip, $\delta(x) \;=\; \begin{cases} 0 & x \;\neq\; 0 \\ \infty & x \;=\; 0 \end{cases}$

ve $\int_{-\infty}^{\infty} dx\;\; \delta(x) \;=\; \int_{0^-}^{0^+} dx\;\; \delta(x) \;=\; 1$ olarak tanımlanır. Dirac delta fonksiyonunun 'eleme' özelliği : $\int_{-\infty}^{\infty} dx\;\; \delta(x)\;\; F(x) \;=$

$$\int_{-\infty}^{0^-} dx\; \delta(x)\; F(x) \;+\int_{0^-}^{0^+} dx\; \delta(x)\; F(x) \;+\int_{0^+}^{\infty} dx\; \delta(x)\; F(x) \;\;=$$

$0 \; + \; F(0) \int_{0^-}^{0^+} dx \; \delta(x) \; + \; 0 \; = \; F(0)$ ile verilir. $\int_{-\infty}^{\infty} dx \;\; \delta(x) \; F(x) \; = \; F(0)$

eşitliğinin daha genel hali $\int_{-\infty}^{\infty} dx \;\; \delta(x - x') \; F(x) \; = \; F(x')$ ve Dirac delta

fonksiyonunun türevlerini içeren $\int_{-\infty}^{\infty} dx \;\; \delta'(x - x') \; F(x) \; = \; -F'(x')$ ve

$\int_{-\infty}^{\infty} dx \;\; \delta^{(n)}(x - x') \; F(x) \; = \; (-)^n \; F^{(n)}(x')$ ifadeleri bir anlamda türev işleminin integral temsilini oluşturmaktadır.

K) Seri Açılımları

Fonksiyonları tanımanın bir yolu da $F(x)$ 'i x 'in pozitif tamsayı kuvvetleri cinsinden açmaktır. Önce $F(x) \; = \; a_0 + a_1 \, x + a_2 \, x^2 + a_3 \, x^3 + \; \cdots$ olarak yazılıp, sonra da üst üste türev alarak $F'(x) \; = \; a_1 + 2 \, a_2 \, x + 3 \, a_3 \, x^2 + \; \cdots$,

$F''(x) \; = \; 2 \, a_2 + 6 \, a_3 \, x + \; \cdots$, $F'''(x) \; = \; 6 \, a_3 + \; \cdots$ elde edilir.

Bu denklemlerin $x \; = \; 0$ 'da değerlendirilmeleri $a_o \; = \; F(0)$, $a_1 \; = \; F'(0)$,

$a_2 \; = \; \dfrac{F''(0)}{2}$, $a_3 \; = \; \dfrac{F'''(0)}{6}$ ve genelde $a_n \; = \; \dfrac{F^{(n)}(0)}{n \, !}$ olduğunu

göstermektedir. Böylece elde edilen $F(x) \; = \; \sum_{n \, = \, 0}^{\infty} \dfrac{F^{(n)}(0)}{n \, !} \; x^n$ 'Maclaurin Açılımı'

denkleminin hangi fonksiyonlar ve bu fonksiyonların hangi tanım aralıklarında geçerli olduklarını özenle incelemek gerekir. İncelenmesi en kolay fonksiyon üstel fonksiyondur.

$F(x) \; = \; \exp(x)$ için tüm $F^{(n)}(x) \; = \; \exp(x)$ ve $F^{(n)}(0) \; = \; 1$

olduğu için $\exp(x) \; = \; 1 \; + \; x \; + \; \dfrac{x^2}{2 \, !} \; + \; \dfrac{x^3}{3 \, !} \; + \; \cdots$ bulunur. Bu denklemde

$x \;\; \to \;\; -x$ dönüşümü yapılarak

$\exp(-x) \; = \; 1 \; - \; x \; + \; \dfrac{x^2}{2 \, !} \; - \; \dfrac{x^3}{3 \, !} \; + \; \cdots$ ve

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad ,$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$ elde edilir.

Maclaurin formülünün $F(x) = \sin x$ fonksiyonuna uygulanması

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$, bunun türevi de

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$ açılımlarını verir.(7) Trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonların seri açılımları arasındaki benzerlik fonksiyon adları arasındaki benzerliğe bir ölçüde ışık tutmaktadır. $\csc x$ gibi $x = 0$ 'da tanımlı olmayan fonksiyonlar bile negatif kuvvetlere de izin vererek açılabilir. Bunun için $x \csc x$ fonksiyonunu açıp sonucu x 'e bölmek yeterli olur : $\csc(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} \cdots$

Böylece $x = 0$ noktasındaki tanımsızlık tek bir terime hapis olmaktadır. $F(x) = \ell n(x)$ gibi fonksiyonlarda bu da geçerli bir yol değildir. Bu durumda fonksiyonu, tanımsız olduğu $x = 0$ yerine, $x = 1$ noktası etrafında açmak gerekir, yani $F(x)$ yerine $F(1+x)$ fonksiyonu açılır. Buna bir örnek olarak, Maclaurin formülü yoluyla açılacak son fonksiyon $F(x) = (1+x)^{\nu}$ Binom kuvvet fonksiyonudur.

$$F^{(n)}(x) = \nu\ (\nu-1)\ \cdots\ (\nu-n+1)\ (1+x)^{\nu-n} \quad \rightarrow \quad F^{(n)}(0) = \nu\ (\nu-1)\ \cdots\ (\nu-n+1)$$

dolayısıyla $$(1+x)^{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu\ (\nu-1)\ \cdots\ (\nu-n+1)}{n\ !}\ x^n$$

‘Binom Açılımı’ elde edilir. Tüm ters fonksiyon türevleri için geçerli yol : Ters fonksiyonun türevini binom açılımı ile açıp, sonucun integralinin almaktır. Ancak bu işlemde ters fonksiyon ve açılımının özel bir noktada değerlendirilerek integral sabitinin saptanması unutulmamalıdır. Bu yaklaşıma örnekler olarak

$$\left[\ell n(1+x)\right]' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad \rightarrow \quad \ell n(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

veya $$\left[\cos^{-1} x\right]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3\,x^4}{8} - \cdots \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3\,x^5}{40} - \cdots$$ verilebilir. (8)

Seri açılımlarına daha genel bir yaklaşımla

$$F(x) = F(x_o) + F'(x_o)\,(x - x_o) + \frac{F''(x_o)}{2\,!}\,(x - x_o)^2 + \cdots$$

veya $$F(x + x_o) = F(x_o) + F'(x_o)\,x + \frac{F''(x_o)}{2\,!}\,x^2 + \cdots$$

'Taylor Açılım' formülleri elde edilir. Yukarıdaki açılımda $x \longleftrightarrow x_o$ dönüşümü

yaparak elde edilen $$F(x + x_o) = F(x) + F'(x)\,x_o + \frac{F''(x)}{2\,!}\,x_o^2 + \cdots$$

denkleminin $F(x + x_o) = \exp\left(x_o \dfrac{d}{dx}\right) F(x)$ olarak ifade edilebilmesi de ilginç bir gözlemdir.

$$\lim_{x \to x_o} \frac{F(x)}{G(x)}$$ işleminin $F(x_o) = G(x_o) = 0$

olduğu için $0/0$ belirsiz formuna dönüştüğü durumlarda

$$\frac{F(x_o) \; + \; F'(x_o) \; (x-x_o) \; + \; \cdots}{G(x_o) \; + \; G'(x_o) \; (x-x_o) \; + \; \cdots}$$ Taylor açılımlarıyla $\frac{F'(x_o)}{G'(x_o)}$ olarak

değerlendirilmesine L'Hospital kuralı denir.[9] Genelde $\frac{F(x_o)}{G(x_o)} = \frac{0}{0}$ ise $\frac{F'(x_o)}{G'(x_o)}$

değerine bakılır ve pay ile paydanın ayrı ayrı türevini alma işlemine belirsiz durumdan kurtulana kadar devam edilir. Biraz gayretle bu kuralın ∞/∞ belirsiz durumu için de geçerli olduğunu göstermek mümkündür.

PROBLEMLER

P.V.1) Türev tanımından hareketle $[F+G]'$, $[k\,F]'$, $[F\,G]'$, $\left[\frac{G}{F}\right]'$

formüllerini elde edin.

P.V.2) $[x^a]'$, $[\sin x]'$, $[\ell n\, x]'$ sonuçlarını kullanarak, geri kalan 24 temel fonksiyonun türevlerini bulun.

P.V.3) Tüm 27 temel fonksiyonun seri açılımlarını yapın.

P.V.4) Tüm 27 temel fonksiyonun integrallerini bulun.

P.V.5) i) $\operatorname{Lim}_{x \to 0} \; [1+\sin x]^{\csc x} = \; ?$; ii) $\left[x^x\right]' = \; ?$

iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x \right) = ?$; iv) $\lim\limits_{x \to 0} \left(e^x + 2x \right)^{1/x} = ?$

P.V.6) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + A} = \int \frac{dx}{(x+3)^2 + (A-9)}$ integralini

i) $A > 9$ için değerlendirin ,

ii) $A < 9$ için değerlendirin ,

iii) $A = 9$ için değerlendirin ,

(iv) $(\mathrm{i}) \to (\mathrm{iii})$ için nasıl bir limit gereklidir ?

(v) $(\mathrm{ii}) \to (\mathrm{iii})$ için nasıl bir limit gereklidir ?

P.V.7) Türev tanımından hareketle bir integralin türevi için Leibniz formülünü elde edin.

P.V.8) $x\, \delta(x) = 0$ olduğunu gösterin.

P.V.9) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta'(x)\, F(x) = -F'(0)$ olduğunu ispatlayın. İpucu : Kısmi integral .

P.V.10) $\lim\limits_{a \to \infty} \frac{a}{\pi} \frac{1}{1 + a^2 x^2} = \delta(x)$ olduğunu gösterin.

P.V.11) L'Hospital kuralı kullanarak $\lim\limits_{x \to 0} (x\, \ell n\, x)$ limitini değerlendirin.

P.V.12) L'Hospital kuralının ∞/∞ durumları için de geçerli olduğunu gösterin.

EKLER VE NOTLAR

(1) Daha üst düzeydeki sayı sistemlerinde Kuaternion'lar için $a\,b = b\,a$, Oktonion 'lar için ise ayrıca $a\,(b\,c) = (a\,b)\,c$ kurallarını feda etmek gerekir.

(2) Bu kitapta $\cos$ ile kolay karışan $\cot$ veya 5 harfli cotan yerine ctn tercih edilmiş, hiperbolik fonksiyonlarda da benzer bir tercih yapılmıştır.

(3) Tarihi bir alternatif metod için : "The Feynman Lectures On Physics" Cilt I , Bölüm 22 .

(4) R. Courant, H. Robbins (Revised by I. Stewart), "What is Mathematics ?, 2nd Edition", Oxford University Press (1996) 518

(5) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}$ eşitliğinin bazı patolojik F fonksiyonları için istisnaları da vardır.

(6) Riemann'a borçlu olduğumuz bu yaklaşımın ana felsefesi : $[\,a\,,\,b\,]$ aralığındaki $\aleph_1$ mertebesinde sonsuz noktayı, $\aleph_o$ mertebesinde sonsuz, ama sonsuz küçük aralık ile temsil etmektir.

(7) Küçük açılar için $\sin\,\theta \approx \theta$ oluşu ve açı-radyan ölçülerindeki

$1\ \text{radyan} = \dfrac{180^{\circ}}{\pi} \simeq 57.3^{\circ}$ ilişkisi gereği $\sin\,A^{o} \simeq \dfrac{A}{57.3}$ olmaktadır.

(8) $\ell n(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$ açılımına $x = -1$ yerleştirilerek

elde edilen $\ell n(0) = -\infty = -\left[\,1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots\,\right]$ eşitliğinden

'Harmonik Seri' toplamının sonsuzluğu hemen görülmektedir.

(9) Bu kural Jean Bernoulli tarafından bulunmuş olmakla beraber buluşun isim hakkını satın alan Marki L'Hospital'ın adıyla anılır.